Diskrete Mathematik
Für Geraffte

Thomas Fankhauser

Moritz Haarmann

Vorwort

Wir haben dieses Skript mit einem Gedanken geschrieben: Diskrete Mathe ohne großen Formalismus, also in möglichst normaler Sprache zu erklären und zu beschreiben. Uns ist dabei völlig klar, dass wir nicht alle Details darstellen, und auch durch die Vereinfachungen manche Nägel nicht auf den Kopf treffen.

Deshalb ist dieses Skript keineswegs als Referenz zur Diskreten Mathematik geeignet, sondern soll vielmehr einen Einstieg in diese teilweise sehr trockene Materie ermöglichen. Wir hoffen und sind überzeugt, dass nach dem durcharbeiten dieses Skripts ein Weiterlesen in einschlägiger Literatur ohne große Probleme möglich ist.

Mit diesem Skript können wir die Einstellung zur Mathematik nicht ändern, jedoch haben wir festgestellt, dass wenn man sich auch für scheinbar uninteressante Dinge erstmal begeistert hat, das eigentliche Verständnis der Materie wesentlich leichter fällt.

Auch wenn wir des Öfteren unsere Witzeleien über die „Randgruppe der Mathematiker“ treiben, sollte sich dadurch keiner verletzt oder angegriffen fühlen.

Viel Spaß beim Verstehen!

Inhalt

Mengenlehre

Basics

Eine Menge für sich genommen ist eine **Sammlung von unterscheidbaren Elementen**. Es darf auch kein Element enthalten sein, dann ist von der „leeren Menge“ die Rede.

$$M = \{Kuh, Pferd, Giraffe\}$$

$$N = \{\, x \mid ist\ gerade \,\}$$

Die **Mächtigkeit einer Menge**, ausgedrückt durch Betragsstriche, bezeichnet die Anzahl in ihr enthaltenen Elemente.

$$|M| = 3$$

Zwei Mengen sind **identisch**, wenn sie die gleichen Objekte enthalten. Duplikate sind, genauso wie die Reihenfolge, nicht von Bedeutung.

$$\{Kuh, Pferd, Giraffe\} = \{Pferd, Giraffe, Giraffe, Kuh\}$$

Die vereinfachte Frage, die man sich dabei stellt ist einfach die : Sind alle Elemente aus Menge 1 auch in Menge 2 enthalten?

Mengenoperationen

Da Mengen für sich genommen relativ langweilig sind, haben sich durchaus schlaue Mathematiker überlegt, triviale Operationen mit Mengen vorzunehmen, getarnt mit nicht-lesbaren und schon gar nicht merkbaren Rechenzeichen.

Vereinigungsmenge

Die Vereinigungsmenge bezeichnet den Zusammenschluss von zwei zu einer Menge. Als Beispiel die Tiere, die zwei Bauern haben.

$$Alois = \{Kühe, Schafe, Schweine\}$$

$$Hans = \{Hühner, Schafe\}$$

Dann ist die Vereinigungsmenge

$$Alois \cup Hans = \{Kühe, Schafe, Schafe, Schweine, Hühner\}$$

Es befinden sich in dieser Menge alle Elemente aus den beiden Urmengen.

$$\boldsymbol{A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}}$$

Schnittmenge

Die Schnittmenge ist wie der Name schon sagt, der Teil von zwei Mengen, bei denen die selben Elemente enthalten sind.

$$Alois \cap Hans = \{Schafe\}$$

Es befinden sich also alle die Elemente in der Schnittmenge, die sowohl in der ersten wie auch in der zweiten Menge enthalten sind:

$$\boldsymbol{A \cap B = \{x | x \in A \text{ und } x \in B\}}$$

Teilmenge

Die Teilmenge ist eine sehr gängige Mengenoperation. Sie beschreibt den Fall, dass es eine Übermenge gibt (z.B. die ganzen Zahlen)und eine andere Menge sich nur aus Elementen dieser Menge bedient. Das ist dann eine Teilmenge.

$$M = \mathbb{Z}$$

$$N = \{x | x \text{ ist eine gerade Zahl}\}$$

Bei diesem Beispiel gilt dann (Beweisfrei und Spaß dabei)

$$N \subseteq M$$

In Worten: N ist eine Teilmenge von M. Wollen wir ausdrücken dass N Teilmenge von M ist, die aber nie identisch mit M ist, gibts dafür den Ausdruck der echten Teilmenge:

$$N \subset M$$

Formal geschrieben gilt:

$$\boldsymbol{N \subseteq M = \{x | x \in N \wedge x \in M\}}$$

Differenzmenge

Die Differenzmenge beschreibt die Operation der Subtraktion bei Mengen. Für die Beispielmengen

$$M = \{rot, grün, gelb\}$$

$$N = \{orange, grün, blau\}$$

Ist die Differenzmenge definiert als

$$M \setminus N = \{rot, gelb\}$$

Sie enthält also alle Elemente aus A, die nicht in B enthalten sind:

$$\boldsymbol{M \setminus N = \{x | x \in M \wedge x \notin N\}}$$

Komplement

Leicht verwirrend, aber eigentlich ganz simpel. Das Komplement einer Menge B existiert nur, wenn diese Menge B Teilmenge einer anderen ist, also gilt:

$$B \subseteq A$$

Spricht man dann vom Komplement von B in A dann sind einfach alle Elemente von A gemeint, die nicht in B sind (also wieder die Differenzmenge)

$$\overline{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{B}$$

Ist B nicht die Teilmenge von irgendwas, ist das Komplement natürlich unfug.

Kartesisches Produkt

Das kartesische Produkt oder auch die Produktmenge von zwei Mengen hebt sich erfreulich von den anderen Mengenoperationen ab. Der Grund: Das Ergebnis ist keine Teilmenge der „Eingabemengen“ sondern eine Menge voller Paare in der Form (a,b). Das kartesische Produkt bildet also eine Menge von *geordneten* Paaren, formal:

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) | \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B}\}$$

Als Beispiel

$$A = \{1,2,3\}$$

$$B = \{a, b\}$$

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

Die Betonung liegt auf geordnet, da im Gegensatz zu Mengen bei den Paaren die Reihenfolge der Elemente eine Rolle spielt, d.h.

$$(a, b) \neq (b, a)$$

Daraus folgt dann natürlich auch dass (klingt trivial, ist aber von großer Bedeutung)

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$$

Relationen

Eine Relation in der Mengenlehre beschreibt eine Verbindung zwischen Elementen von Mengen. Allgemein kann man sagen dass wenn es zwei Mengen A und B gibt, dann ist eine Relation

$$\boldsymbol{R \subseteq A \times B}$$

Eine Teilmenge des kartesischen Produkts dieser Menge.

$$A = \{rot, grün\}$$

$$B = \{1,0\}$$

$$A \times B = \{(rot, 1), (grün, 1), (rot, 0), (rot, 1)\}$$

Davon ausgehend kann eine Relation R z.B. durch

$$R \subseteq A \times B = \{(rot, 0)\}$$

Gegeben sein, und somit eine Verbindung zwischen rot und 0 herstellen.

Eine Relation muss nicht immer über zwei Mengen gehen, sondern kann auch eine innere Relation sein, also eine, die sich nur auf eine Menge bezieht. Dann ändert sich die Definition in

$$R \subseteq A \times A$$

Wichtig ist das vor Allem bei Ordnungs- und Äquivalenzrelationen, dazu später mehr. Ist dies der Fall, redet man auch von einer *homogenen*, ansonsten von einer *heterogenen* Relation.

Eigenschaften von homogenen Relationen

Homogene Relationen, also wie schon erwähnt Relationen die sich auf nur auf eine Menge beziehen, haben spezielle Eigenschaften.

Reflexivität

Eine homogene Relation ist reflexiv, wenn für alle Elemente a der Menge eine Relation (a,a) existiert. Das heisst einfach, dass sich alle Elemente einer Menge, um dieses Kriterium zu erfüllen, auf sich selbst beziehen müssen.

$$\forall \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}: (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \in \boldsymbol{R}$$

Symmetrie

Eine Relation ist dann symmetrisch, wenn alle Relationen der Form (a,b) auch als (b,a) vorliegen:

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{A}: (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{R} \wedge (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \in \boldsymbol{R}$$

Antisymmetrie ist logischerweise dann der Fall, wenn

$$(a,b) \in R, (b,a) \notin R$$

Ganz wichtig ist, dass Reflexivität ausgeschlossen wird, d.h.

$$(a,a) \in R$$

Ist trotz Reflexivität antisymmetrisch, da Antisymmetrie sich nur auf unterscheidbaren Elemente einer Menge, nicht aber auf gleiche Elemente.

Transitivität

Eine Relation ist Transitiv, wenn z.B. zwischen fiktiven Elementen a und b, sowie zwischen b und c eine Relation existiert: (a,b),(b,c). Die Transitivität ist dann gegeben, wenn daraus folgt:

$$\boldsymbol{A = (a,b,c); (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R}$$

Also aus der Verbindung zwischen a,b und c auch folgt dass a und c verbunden sind. Es ist vergleichbar damit, jemand um „ein paar Ecken“ zu kennen.

Äquivalenzrelation

Sind die drei Kriterien der Symmetrie, Reflexivität und Transitivität erfüllt reden wir von einer Äquivalenzrelation.

Unter dem Begriff der **Äquivalenzklassen** fasst man alle gleichartigen Elemente zusammen, siehe Beispiel.

Beispiel:

Es sei M = *{1, 2, 3, 9, 10, 12, 18, 21, 30, 45}*. Weisen Sie nach, daß die Relation $R = \{(x, y) \in M \times M \mid x \text{ hat die gleiche Quersumme wie } y\}$ eine Äquivalenzrelation darstellt und bilden Sie die Äquivalenzklassen.

1. Ist das Reflexivkriterium erfüllt? Die Antwort: ja, da aus der Definition von R folgt, dass Relationen für alle Elemente existieren deren Quersumme gleich ist, d.h. 1 bezieht sich deswegen auch auf 1, da die Quersumme identisch ist.
2. Ist das Symmetriekriterium erfüllt? Ebenfalls ja, da wieder aus der Definition folgt dass wenn z.B. das Paar (3,12) existiert, auch (12,3) existieren muss, da die Quersummenbedingung erfüllt ist.
3. Ist R transitiv? Ja, betrachten wir alle Elemente mit der Quersumme 3. Hier sind die Paare (3,3),(3,12),(3,21)...(12,21)...(21,21) vorhanden. Die Frage ist jetzt, wenn man x=3,y=12 und z=21 setzt, ob tatsächlich eine direkte Verbindung zwischen x und z existiert, wenn eine Verbindung zwischen x,y und y,z existiert. Und das ist der Fall.

d.h. jetzt wäre gezeigt das es sich um eine Äquvalenzrelation handelt. Jetzt ist noch die Aufgabe, Äquivalenzklassen zu bilden, d.h. alle gleichartigen Elemente der Relation werden in Mengen geteilt:

[1] = {1,10}, [2] = {2},[3]={3,12,21,30},[9]={9,18,45}.

Wobei in den eckigen Klammern jeweils das Kriterium (hier die Quersumme) steht.

Wer sich hier ausklingt weil irgendwie der Zusammenhang nach Hause gegangen ist kann sich eine Relation einfach mit dem Modell einer Datenbank vorstellen. Jetzt haben wir da eine Menge, die in der Datenbank eine Tabelle darstellt. In unserer Beispielaufgabe enthält diese Tabelle genau eine Spalte, und zwar eine die nur Zahlen enthält. Jetzt kann man natürlich mit SQL ganz komfortabel z.B. alle Wertepaare abfragen:

```
SELECT x,y from MENGE where QUERSUMME(x)=QUERSUMME(y);
```

Weitergehend kann man dann die Äquivalenzklassen auch ganz einfach bilden:

```
SELECT x,y where QUERSUMME(x) = QUERSUMME(y) group by QUERSUMME(x);
```

Ordnungsrelation

Jetzt gibt es natürlich nicht nur Äquivalenzrelationen, sondern auch Ordnungsrelationen. Eine Ordnungsrelation ist nicht wie die Äquivalenzrelation umkehrbar (symmetrisch), sondern nur „in eine Richtung" zeigend, d.h. antisymmetrisch. Ein Beispiel für eine Ordnungsrelation wäre die folgende Relation

$$M = \{1,2,3\}$$

$$R = \{(x,y) \in M \times M | x \text{ } ist \text{ } kleiner \text{ } als \text{ } y\}$$

Es ist also die Menge aller Paare gefordert, bei denen x kleiner als y ist. Das sind natürlich nicht besonders viele, also

$$R = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$$

Wir haben die Ursprüngliche Menge also mithilfe der Relation R ganz einfach sortiert.

Halbordnung

Bei den Ordnungsrelationen, die zur Klasse der Halbordnungen gehören, besteht im Gegensatz zu dem Beispiel oben die Besonderheit, dass sich jedes Element auch auf sich selbst beziehen *darf*. Würden wir unser Beispiel abwandeln nach

$$R = \{(x,y) \in M \times M | x \le y\}$$

Würden wir folgende Paare erhalten

$$R^* = \{(1,2),(1,3),(2,3),(1,1),(2,2),(3,3)\}$$

Wie man sieht, ist diese Halbordnung dann *reflexiv* (Da immer (1,1) etc..) enthalten sind, *transitiv* (da immer gilt : wenn 1 kleiner als 2 und 2 kleiner als 3 ist.. ist 1 auch kleiner als 3).

Wichtig ist aber auch: das ganze Zeug ist *antisymmetrisch,* d.h. wenns (x,y) in der Relation gibt kann es ja logischerweise NIE (y,x) auch geben, wäre ja Unfug.

Striktordnung

Im Gegensatz zur Halbordnung, die Reflexivität erlaubt, sagt die Striktordnung, dass gerade dass nicht erlaubt ist. Daraus folgt ganz einfach, dass kein Element in Beziehung zu sich selbst stehen darf (Fachwort wäre antireflexiv), ansonsten sich aber alles genau wie bei der Halbordnung verhält.

Lineare Ordnung

Und zu guter Letzt... die lineare Ordnung beschreibt im Prinzip eine oben beschriebene Halbordnung, nur mit der Bedingung dass jedes Element mit jedem in Relation stehen muss, also eine *totale* Relation gegeben sein muss.

Abbildungen

Nun wissen wir, was Mengen sind, wie Relationen funktionieren und können auch schon mit Ihnen operieren. Da es natürlich sehr viele Mathematiker auf der Welt gibt und der Wettkampfgedanke, gerade bei Männern, besonders ausgeprägt ist und war, wurde natürlich hier nicht aufgehört zu spezialisieren. Man definierte die Abbildung als eine spezielle Relation, die *linkstotal* und *rechtseindeutig* ist, dh. dass die Relation jedem Wert der Menge A, *Urmenge* unter Mathematikern, genau *ein* Wert aus der Menge B zugeordnet wird, die Paare in der Relation (x,y) also eindeutig sind, also zB.:

$$A = \{1,2,3\}$$

$$B = \{4,5,8\}$$

$$R = \{(1,4),(2,5),(3,4)\}$$

Da aber die Mathematiker doch so gerne definieren, gibt es für Abbildungen noch weitere Eigenschaften, sie können:

- Injektiv
- Surjektiv
- bijektiv

sein.

Injektivität

Die monogame der Eigenschaften, da hier zu jedem y aus B nur genau ein x aus A gehören darf, dh. ein Element der Menge B darf leider nur einen einzigen Partner aus A haben, zB.$R =$

$$R = \{(1,5),(2,4),(3,8)\}$$

ist injektiv, jedoch

$$R = \{(1,5),(2,4),(3,5)\}$$

nicht, da die 1 und die 3 hier beide behaupten ihre Partnerin sei die 5. In arabischen Ländern ist man zwecks der Haarems auf diese Eigenschaft leider nicht sehr gut zu sprechen.

Surjektivität

Nimmt man nun aber an, die 5 sei eine sehr unsympathische Zahl die sich nichts sehnlicher als einen Partner aus A wünscht und bekommt leider dennoch keinen ist die Abbildung nicht surjektiv, da für diese verlangt wird, dass alle Elemente aus B mit einem Partner aus A versorgt werden müssen, zB.

$$R = \{(1,5),(2,5),(3,5)\}$$

ist nicht surjektiv, da die 4 und die 8 aus der Menge B keinen Partner haben.

Bijektivität

Mit ihr lebt es sich am entspanntesten, da jeder seinen eigenen alleinigen Partner hat und auch keiner alleine sein muss. Mathematisch trifft dies zu falls die Abbildung *injektiv* und *surjektiv* ist, dh:

$$R = \{(1,8),(2,5),(3,5)\}$$

Umkehrabbildung

Da nun jeder Partner eindeutig vergeben ist und weiss zu wem er gehört, kann man bei einer *bijektiven* Abbildung natürlich auch vom Partner aus der Menge B wieder zurück zum Partner A. Dies nennt man dann eine Umkehrabbildung, zB. ist völlig klar, dass bei den Partnern die durch (1,8) definiert sind die normale Abbildung von der 1 zur 8 Abbildet, die Umkehrabbildung von der 8 zu 1.

$$a(1) = 8$$
$$a^{-1}(8) = 1$$

Komposition

Nun ist eine Abbildung alleine dem Durchschnittsmathematiker natürlich meist viel zu langweilig, bzw. trivial. Am liebsten baut er sich komplizierte Abbildungen die er dann nach Herzenslust hintereinander ausführen oder ineinander einbauen kann. Er spricht dann von einer so genannten *Komposition von Abbildungen*. Und weil wir heute unseren sozialen Tag haben und auch die Randgruppe der Mathematiker einmal verstehen wollen, strengen wir uns an folgendes zu verstehen:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Das bedeutet nichts anderes als dass erst die rechte Abbildung ausgeführt wird, und dann die linke. Wichtig ist hierbei natürlich das die Reihenfolge eine immense Rolle spielt, dh. es ist natürlich nicht egal ob f nach g ausgeführt wird, oder g nach f, gut lateinisch spricht man hier von davon das eine Komposition von Abbildungen nicht *kommutativ* ist. Im Gegensatz dazu ist es egal wie man die Klammern setzt, dh.:

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

Man spricht dann davon das eine Komposition von Abbildungen assoziativ ist. Wem dass jetzt noch nicht bekannt vorkommt hat im *Kapitel der Gruppen* nicht aufgepasst da diese, wir erinnern uns ja mindestens *assoziativ* bezüglich ihrem Operator sein müssen, sowie für *abelsche Gruppen* auch die *kommutativität* gegeben sein muss.

Gruppen und Körper

Warum eigentlich?

Wir haben uns ja schon wirklich zur Genüge mit Mengen ausseinandergesetzt. Jetzt ist eine Menge für sich genommen, wie schon vorher festgestellt, ungefähr das Nutzloseste was es gibt.

Mehr Sinn ergeben Mengen, wenn man auf sie Operationen anwenden kann. Das bekannteste Beispiel sind die natürlichen Zahlen, die man bekanntlich mit +,-,* und / wunderbar miteinander kombinieren kann.

Da der Mathematiker für sich genommen allerdings nichts undefiniert lassen kann, hat man dazu die absichtlich sehr verwirrenden Begriffe der Gruppen und der Körper eingeführt.

Gruppen

Um Gruppen sinnvoll zu erklären, als Einsteig die Bedingungen die wir haben

- Eine Menge M
- Eine Operation $\otimes$, die auf zwei Elemente der Menge angewendet wird.

Man sollte sich nicht durch das Glühbirnensymbol verwirren lassen, es ist einfach ein Platzhalter für „irgendeine“ Operation, könnte zum Beispiel für Addition oder Subtraktion stehen.

Als einfachstes Beispiel wäre hier z.B. die Menge der Ganzen Zahlen und die Operation „+“ zu nennen. Dann wäre M=Z, und $\otimes = +$.

Bedingungen für eine Gruppe

Aber natürlicher hat der fleißige Definiteur ein paar Fallstricke eingebaut, die der Gruppenbeweiser elegant umschiffen muss. Die Bedingungen, die zwingend erfüllt sein müssen, um eine Gruppe zu erhalten, sind

Abgeschlossenheit

Abgeschlossenheit bedeutet, dass jedes Ergebniss der Operation ein Element von M ist, und nie ausserhalb von M liegen darf. Als Beispiel dienen wieder die ganzen Zahlen: 2+4 ist 6 und liegt somit auch wieder in den ganzen Zahlen. Wäre das Ergebniss jetzt aber -0.3, wäre die Abgeschlossenheit verletzt und die ganzen Zahlen keine Gruppe!

Klammern sind Egal

Auch unter dem Decknamen der *Assoziativität* bekannt, sagt dieses Bedingungchen aus, dass eventuell vorhandene Klammern frei gesetzt werden können, und nichts am Ergebnis verändern. Einleuchtend: (2+4)+6 = 2+(4+6).

Neutrales Element

Von Profis auch gern die Schweiz der Menge genannt, hat die Wirkung, dass es bezüglich der Operation und einem beliebigen Element aus der Menge keine Wirkung hat, d.h. das Ergebnis der Operation ist wieder das Element.

$$0 + 2 = 2$$

$$1 * 2 = 2$$

In diesem Fall ist die 0 das neutrale Element bezüglich der Addition. Bei der Multiplikation wäre es die 1.

Inverses Element

Der Rückwärtsgang unter den Elementen! Egal mit welchem anderen Element das inverse Element auf die Operation angewendet wird, es kennt nur ein Ergebnis: das neutrale Element.

$$a * \frac{1}{a} = 1$$

Wir sehen, dass bei der Multiplikation mit einem beliebigen Wert der Kehrwert als inverses Element fungiert, und natürlich die 1 ausgibt, das neutrale Element der Multiplikation.

Abelsche Gruppe

Falls es nun auch noch egal ist, welches Element vor- und welches nach dem Operator steht, also trotz vertauschen das selbe Ergebnis resultiert spricht man von einer abelschen Gruppe.

$$a \otimes b = b \otimes a$$

Dies umschreiben die Mathematiker unter uns gerne mit dem Begriff der *Kommutiativität*. Klar ist, dass in den ganzen Zahlen 1 + 2 = 2 + 1 ist, also ist die Menge der ganzen Zahlen bezüglich der Addition eine abelsche Gruppe.

Körper

Gruppen sind natürlich was sehr Feines, klare Sache. Da der durchschnittliche Mathematiker aber auch gern mal weiterdenkt, und zwei Operationen ja auch ganz nett sein können, wurden die Körper erfunden. Sie sind grob gesagt eine Erweiterung des Modells der Gruppe um einen Operator.

Das normale Rechnen, wie in Grundschulzeiten gelernt, spielt sich ja in relativ engen Grenzen ab. Klammer- und Punkt-vor-Strich-Regeln sorgen dafür, dass die Ergebnisse meistens die gleichen bleiben. Die Körpertheorie ist ein Versuch, diese „Basics“ theoretisch zu beschreiben.

Vorbedingung sind, ähnlich wie bei der Gruppe

- Eine Menge M
- Eine Operation „+“
- Eine Operation „*“

Da es bisweilen auch den Mathematikern zu krass wurde mit ihren Glühbirnensymbölchen, wurde das einfach weggelassen und durch die bekannte Addition bzw. Multiplikation ergänzt.

Bedingungen für einen Körper

Ein Körper existiert jetzt genau dann, einfach per Definition, wenn die Operationen jeweils mit der Menge M eine Gruppe bilden. Im Detail

- G(M,+) muss eine Gruppe sein
- G(M,*) muss eine Gruppe sein
- Das Distributivgesetz, also die Regeln zum Ausklammern bzw Ausmultiplizieren, müssen genau so wie wir sie kennen auf + und * anwendbar sein.

Sind diese drei Kriterien erfüllt, haben wir einen Körper über M. Entscheidend für das Verständnis ist natürlich, dass man mit den Gruppen „warm“ geworden ist, ohne sie ist es in meinen Augen nicht möglich, Körper zu verstehen.

Beispiele

Die gängigsten Körper, mit denen wir täglich zu tun haben, sind die Körper über den ganzen Zahlen

$$K(\mathbb{Z}, +, *)$$

und über den reelen Zahlen

$$K(\mathbb{R}, +, *)$$

Teilkörper

Ganz wunderbar erklären lässt sich das Konstrukt des Teilkörpers. Gehen wir davon aus, dass wir einen Körper K haben, von dem wir auch schon alles bewiesen haben, wir also wissen, dass es tatsächlich ein echter Körper ist.

Was passiert jetzt wenn wir nur mit einer Teilmenge der Ursprünglichen Menge arbeiten wollen?

Wir definieren uns einfach einen Teilkörper. Dieser besteht natürlich wieder aus einer Menge von Elementen (=> z.B. Zahlen), die eine Teilmenge .....

Komplexe Zahlen

Da wir nun wissen das dass, was wir bisher gerechnet haben sich unbewusst immer in einem Körper, nämlich dem der Reellen Zahlen, abgespielt hat könnten wir uns nun, wenn wir Mathematiker wären darüber aufregen das es in diesem Körper leider immer noch die Möglichkeit gibt Gleichungen zu aufzustellen die nicht definiert sind. Man kennt das ja, im jungen Alter saß man in der Schule, und bekam vom Lehrer erzählt das man nun einfach so hinnehmen solle, dass es für:

$$x^2 = -1 \;\Rightarrow x = \sqrt{-1}$$

auch mit der heiß-verhassten Mitternachtsformel keine Lösung gab. Und wenn einen das interessieren würde, würde man ihm dann später erklären, dass es doch irgendwie geht.

Und da Mathematiker „nicht definiert“ nicht einfach so auf sich sitzen lassen konnten, beschlossen sie einfach den Körper der Reellen Zahlen in einen noch größeren zu packen, und in dem dann einfach kreativer weise eine Lösung für negative Wurzeln zu definieren:

$$\boldsymbol{x^2 = -1 \;\Rightarrow x = \sqrt{-1} \;\Rightarrow x = i}$$

Man soll sich also einfach vorstellen dass √-1 = dem Buchstaben i ist. Und weil sie merkten dass das ganze dann doch recht komplex wurde nannten sie diesen neuen eierlegenden-wollmilch-Sau Körper einfach den Körper der *komplexen Zahlen*.Was nun wirklich praktisch an diesem Körper ist, dass alles wie bisher bekannt weiter gerechnet werden kann und es in ihm aber im Gegensatz zu dem der Reellen Zahlen keine undefinierten Lösungen mehr gibt. Die Mathematiker sprechen hier von der *Abgeschlossenheit*.

Nun stellt sich die Frage, wie schaut so eine komplexe Zahl denn aus? Beispiel gefällig:

$$15$$

Ja, dies kann wirklich eine Zahl im komplexen Körper sein weil wir, wir erinnern uns in den neuen Super-Körper ja nur die Reellen Zahlen + den Buchstaben i gepackt haben. Damit dies einfacher lesbar ist, schreibt man eine vollständige komplexe Zahl dann auch so ähnlich:

$$a + b * i$$

$$5 + 8 * i$$

$$5 + 8 * \sqrt{-1}$$

Man sollte sich nicht durch diese „komische“ Schreibweise verwirren lassen, sie ist nur da, da sie beim Rechnen später ziemliche Vorteile bringt. Das a und b sind ganz „normale“ Zahlen wie wir sie bisher kennen, das i ist nichts anderes als √-1. Der Mathematiker spricht bei a vom *Realteil* und bei b·i vom *Imaginärteil*, weil man sich ja das i für die √-1 vorstellen muss. Klar ist auch, das bei $(\sqrt{-1})^2$ die Wurzel einfach gekürzt werden kann, dh.

$$\sqrt{-1} = i$$

$$(\sqrt{-1})^2 = i^2 = -1$$

$$5 + 8i^2 \Rightarrow 5 + 8 * (-1) \Rightarrow 5 - 8 = -3$$

und man kann für i^2 einfach -1 schreiben.

Addition und Subtraktion

Die Addition kann ganz normal wie wir es gewohnt sind ausgeführt werden, zB:

$$(5 + 5 * i) + (10 + 10 * i) = 15 + 15 * i$$

$$\boldsymbol{(a + b * i) + (c + d * i) = (a + c) + (b + d) * i}$$

Die Subtraktion läuft ebenso, indem man den *Real*- und *Imaginärteil* getrennt subtrahiert:

$$(5 + 5 * i) - (10 + 10 * i) = -5 - 5 * i$$

$$\boldsymbol{(a + b * i) - (c + d * i) = (a - c) * (b - d) * i}$$

Multiplikation

Da wir alle ein wenig faul sind, wäre es doch praktisch wenn man genau wie in den „normalen“ Zahlen einfach die Klammern ausmultiplizieren könnte. Dann tun wir es doch einfach, dass einzige worauf man wirklich achten sollte ist das i·i = -1 ergibt zB:

$$(6 + 5 * i) * (5 + 5 * i)$$

$$= 6 * 5 + 6 * 5 * i + 5 * i * 5 + 5 * i * 5 * i$$

$$= 30 + 30 * i + 25 * i + 25 * i * i$$

$$= 30 + 55 * i + 25 * (-1)$$

$$= 5 + 55 * i$$

$$\boldsymbol{(a * c - b * d) + (a * d + b * c) * i}$$

Negative komplexe Zahlen

Bevor wir zur Division kommen ist es noch praktisch zu wissen, wie wir eine komplexe Zahl erweitern müssen um eine reelle Zahl zu bekommen, die Frage taucht spätestens dann auf, wenn wir in einem Bruch einen Nenner Reell machen wollen. Um zu einer komplexen Zahl eine andere komplexe Zahl zu finden, die egal ob man sie Addiert oder Multipliziert als Ergebnis immer eine reele, positive Zahl ergibt dreht man einfach das Vorzeichen vor dem *Imaginärteil* um, dh.:

$$z = 5 + 5 * i \Rightarrow z^* = 5 - 5 * i$$

Betrachtet man nun die Addition subtrahiert sich der *Imaginärteil*, bei der Multiplikation löst er sich durch die Tatsache dass i·i = -1 ganz auf:

$$(5 + 5 * i) + (5 - 5 * i)$$

$$= 5 * 5 = 25$$

$$(5 + 5 * i) * (5 - 5 * i)$$

$$= \; 5 * 5 + 5 * 5 = 50$$

Im mathematischen Fachjargon ist dann z* = 5-5i die *Konjugation* von z = 5+5i.

Divison

Bei der Division nimmt man sich genau diese Tatsache zu nutze, da man unter dem Bruchstrich eine reelle Zahl haben möchte:

$$\frac{z_1}{z_2}$$

$$\frac{z_1 * {z_2}^*}{z_2 * {z_2}^*}$$

$$z_1 = 10 + 10 * i$$

$$z_2 = 5 + 5 * i$$

$$\frac{(10 + 10 * i) * (5 - 5 * i)}{(5 + 5 * i) * (5 - 5 * i)}$$

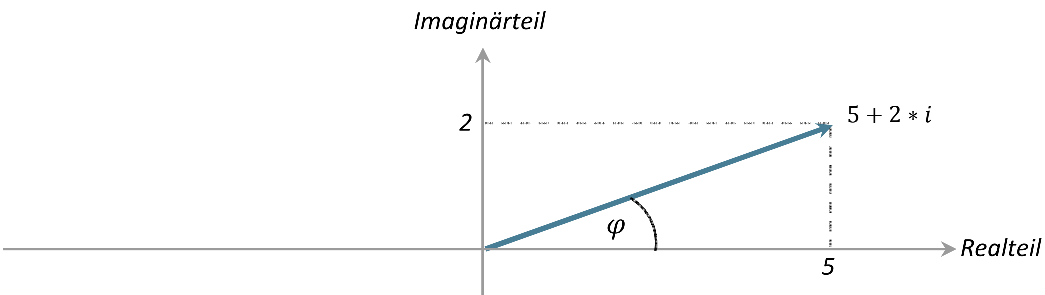
$$\frac{50 - 50 * i + 50 * i + 50}{50}$$

$$\frac{100}{50} = 2$$

Man erweitert den Nenner mit der negativen Zahl des Nenners, und bekommt so einen rein reellen Teil unter den Bruchstrich. Im Zähler wird ganz normal ausmultipliziert und wie man es bisher auch nicht anders gemacht hätte geteilt.

Betrag komplexer Zahlen

Da auch die Herren Mathematiker festgestellt haben das sie normal-sterbliche am besten verstehen wenn sie ihre wirren Gedankengänge visualisieren kamen sie auf den schlauen Gedanken die komplexen Zahlen in einen Zahlenstrahl einzuzeichnen. Da komplexe Zahlen aber wie wir schon wissen den *Real-* und *Imaginärteil* besitzen brauchen wir einen besonderen Zahlenstrahl, der noch eine zweite Dimension nach oben hat:



Jetzt wird auch ziemlich sofort klar, das wir den Betrag einer komplexen Zahl ganz nach dem greißigen Herrn Pythagoras mit:

$$|\boldsymbol{z}| = \sqrt{\boldsymbol{Realteil^2} + \boldsymbol{Imagin\text{ä}rteil^2}}$$

berechnen können. Da praktischer weise i2 immer -1 ergibt resultiert immer eine reelle Zahl:

$$\sqrt{5^2 + (2 * (-1))^2} = 25 + 4 = \sqrt{29}$$

Wie man sieht, ziemlich logisch das alles. Logisch ist jetzt natürlich auch, dass man die komplexen Zahlen dann nicht nur wie wir bisher durch Koordinaten angeben kann, der Mathematiker spricht hier von der *kartesischen Form* sondern auch mit ihrem Betrag und dem Winkel des „Pfeiles“. Man kann dann einfach berechnen dass:

$$z = a + b * i$$
$$a = |z| * \cos\varphi$$
$$b = |z| * \sin\varphi$$
$$z = |z| * (\cos(\varphi) + i * \sin(\varphi))$$

Möchte man nun den Winkel, unter Mathematikern auch das Argument einer komplexen Zahl berechnen, wird aus dem oberen Koordinatensystem recht schnell ersichtlich, das der Winkel einfach durch auflösen von zb. b oder a nach φ berechnet werden kann:

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{b}{|z|}\right)$$

Lineare Gleichungssysteme

Ein wunderbares Wortungeheuer, dass wohl jeden von uns schon ausreichend oft geärgert hat. Worum geht es? Lineare Gleichungssysteme geben uns ein Mittel an die Hand, Gleichungssysteme zu lösen. Was ist ein Gleichungssystem? Ganz einfach, eine Sammlung von Gleichungen.

Haben wir z.B. die Frage gegeben (vielleicht aus einer Rate- und Knobelshow bei 9Live) :

Aufgabe: Eine Mutter ist 21 Jahre älter als ihr Kind und in 6 Jahren wird das Kind 5 mal jünger sein, als die Mutter. Wo ist der Vater?

Was natürlich im ersten Moment wie rasender Unfug aussieht, entpuppt sich nach einer süßen Rechnung mithilfe unserer linearen Gleichungssysteme als perfekt lösbar. Wir fangen einfach an, setzen das Alter der Mutter auf x, und das Alter des Kindes auf y. Aus den Informationen in der Aufgabe können wir jetzt losbasteln:

$$y + 21 = x$$

$$\frac{x + 6}{5} = y + 6$$

Setzen wir jetzt die obere Gleichung in die untere ein erfahren wir

$$\frac{y + 27}{5} = y + 6$$

$$y + 27 = 5y + 30$$

$$-4y = 3$$

$$y = -\frac{4}{3}$$

Einfache Folgerung: Das Kind (y) ist im Moment -9 Monate alt, d.h. der Vater robbt wohl gerade über die Frau Mama. Dann wäre das ja auch geklärt.

Wir beschäftigen hier also damit, verschiedene Gleichungen in einen sinnvollen Zusammenhang zu bringen und Methoden zur Lösung vorzustellen.

Ausgangsbedingung

Am Anfang einer jeden Lösung steht immer das Problem. Das sieht, formalisiert, so aus

$$a_1x_1 + b_1x_2 \dots n_1x_n = z_1$$

$$\vdots$$

$$a_nx_1 + b_nx_2 \dots n_nx_n = z_n$$

Das ist also unsere „Ausgangsform". Diese Ausgangsform bildet die Basis für eine weitere Ver(w)irrung, die „Koeffizientenmatrix". Hinter diesem Schmucken Begriff verbirgt sich eine Matrix, die nur die Koeffizienten, also die „Zahlen vor den Xen" enthält.

$$\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & z_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & \cdots & z_n \end{pmatrix}$$

Beispiel

Viel Knäckebrot, jetzt mal ein einfaches Beispiel. Gegeben sei das Gleichungssystem in durch

$$2x + 4y + 3z = 2$$

$$1x + 12y - 3z = 1$$

Die Koeffizientenmatrix dafür schreibt sich so

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 12 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Kein großes Deal, kann aber eben eine begriffliche Verwirrung sein.

Homogenes Gleichungssystem

Bei einem homogenen (gleichförmigen) LGS befindet sich nach dem „=" in jeder Zeile eine 0. Das führt dazu, dass es immer eine Lösung gibt, und zwar die, dass alle Variablen a..n 0 sind.

Heterogenes Gleichungssystem

Hier ist genau das Gegenteil der Fall: Nach dem „=" können von 0 unterschiedliche Werte stehen. Diese Systeme sind deshalb auch schwerer zu lösen, da sich die a..n=0 Lösung natürlich verbietet.

Matrizen

Oben wurde der Begriff der Koeffizientenmatrix eingeführt. Eine Matrix beschreibt nichts weiter als eine „Tabelle" voller Zahlen.

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} & n \\ m & \end{array}$$

Diese Matrizen erleichtern uns das Rechnen mit LGS enorm, da sie „unwichtige" bzw redundante Information einfach weglassen. Damit wir sinnvoll mit ihnen arbeiten können, müssen wir aber leider wieder ein paar Begriffe und Operationen die mit ihnen zusammenhängen erklären.

Dimension

Die Dimension einer Matrix wird mit den Variablen m und n bezeichnet. Dabei gibt m die Zeilen, und n die Spaltenzahl an. Wir reden dann von einer m x n Matrix, in Worten m kreuz n Matrix.

Diagonalmatrix

Die Diagonalmatrix beschreibt eine Matrix, in der alle Elemente ausser der Diagonale 0 sind.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix

Eine große Errungenschaft, eine Matrix die einfach nur eine Diagonalmatrix mit keinen Elementen ausser 0 und 1 darstellt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diese Einheitsmatrix wird bei der Multiplikation und anderen Operationen von Bedeutung sein.

Dreiecksmatrix

Die Dreiecksmatrix beschreibt eine Matrix, bei der entweder ober- oder unterhalb der Mitteldiagonale nur 0 steht.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Addition

Die Addition läuft ganz simpel komponentenweise ab, funktioniert aber dann natürlich auch nur wenn beiden Matrizen die selbe Dimension haben.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+4 \\ 0+3 & 3+1 \end{pmatrix}$$

Skalarmultiplikation

Die Multiplikation mit einem Skalar, also eine ganz „normalen" Zahl läuft analog zur Addition einfach komponentenweise ab. Falls 2 Matrizen miteinander multipliziert werden geschieht dies wie unten beschrieben.

Multiplikation

Wichtigste Vorbedingung: Um zwei Matrizen zu multiplizieren, muss die Spaltenzahl der einen gleich der Zeilenzahl der Anderen sein. Man könnte jetzt kompliziert mit einer Summenformel arguementieren wie multipliziert werden muss, viel einfacher ist es aber einem Klugen Mann namens Falk unser vollstes Vertrauen zu schenken, da er eine sehr übersichtliche Hilfestellung zur Multilikation liefert:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Wenn wir jetzt A mit B multiplizieren schreiben wir beide Matrizen in folgender Tabelle auf:

			6	-1
			3	2
			0	-3
1	2	3	$\mathbf{1 * 6 + 2 * 3 + 3 * 0 = 12}$	$\mathbf{1 * (-1) + 2 * 2 + 3 * (-3) = -6}$
4	5	6	$\mathbf{4 * 6 + 5 * 3 + 6 * 0 = 39}$	$\mathbf{4 * (-1) + 5 * 2 + 6 * (-3) = -12}$

$$A * B = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ 39 & -12 \end{pmatrix}$$

D.h. wir multiplizieren die einzelnen Kompontenten der Matrizen wie in der Tabelle ersichtlich miteinander und summieren sie dann auf. Das ergibt dann jeweils die Ergebniskompontente.

Berechnung eines LGS

Für die Berechnung des Ergebnis eines LGS gibt es unzählige Verfahren, für uns wichtig ist aber das Gaußsche Verfahren zur Lösung dieser Systeme.

Als Vorbereitung ist es wichtig zu wissen, dass es 3 elementare Umformungen gibt, die das *Ergebnis nicht verändern.*

Diese Umformungen betreffen

- Das Vertauschen von Zeilen im LGS
- Die Addition einer Zeile mit einer Anderen,.
- Und die Multiplikation mit einem beliebigen Faktor.

Natürlich darf man diese Operation auch nach Lust und Laune verketten, wichtig ist nur dass man einfach nichts anderes als diese drei anwendet. Da es nur so von Erklärungen des Gaußverfahrens wimmelt, rechnen wir beispielhaft und ohne große Erläuterung durch, wer nicht nachvollziehen kann, was wir tun, öffnet einfach die Wikipedia seiner Wahl und schlägt darin das Kapitel nach.

Gaußverfahren

Wie immer, wir fangen an mit einem Beispiel-LGS:

$$\begin{pmatrix} 1x & +2y & & =1 \\ 2x & +3y & & =1 \\ 3x & +4y & +1z & =1 \end{pmatrix}$$

In dieser Form kann man die Lösung definitiv nicht durch ablesen bestimmen. Das dachte sich auch Herr Gauß, und entwickelte ein ziemlich logisches Schema zur Lösung von diesem Zeug. Um uns das Schreiben zu Vereinfachen, rechnen wir mit der Koeffizientenmatrix weiter.

Schritt 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Schritt 2(die Dreiecksform)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Schritt 3 (Diagonalform)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Auch wenn man natürlich von Schritt 2 aus durch Rückeinsetzen alle Ergebnisse bekommen könnte, bietet sich die Diagonalform zum direkten ablesen natürlich besser an.

Lösbarkeit

Grundsätzlich entscheidend ist natürlich zu wissen, *ob* ein System lösbar oder nicht ist. Dafür gibt es in erster Linie den wichtigen Begriff der *Determinante*. Eine Determinante ist nichts anderes als eine Zahl, die angibt, ob die Gleichung eine Lösung besitzt oder nicht. Sehr einfach im Prinzip. Nur die Berechnung kann man als „tricky" Bezeichnen.

Weiterhin kann man die Lösbarkeit bestimmen, falls eine inverse Matrix bilden kann. Diese beiden Methoden werden wir jetzt vorstellen.

Determinante

Gut, so einfach kann man das natürlich nicht sagen. Die Determinante ist nicht nur eine Maßzahl für die Lösbarkeit eines LGS, sondern *„eine spezielle Funktion, die einer quadratischen Matrix oder einem linearen Endomorphismus eine Zahl zuordnet."*. Na wenn dann nicht alles klar ist!

Begriffsklärung: eine quadratische Matrix ist nichts anderes als z.B. eine Koeffizientenmatrix. Was allerdings ein linearer Endomorphismus ist, verschließt sich auch den Autoren. Wichtig ist nur der Zusammenhang dass die Determinante nicht einfach in den Raum tanzt, sondern eine *Funktion über einer Matrix ist*, zumindest ist sie das für uns.

Aussage der Determinante

In Bezug auf die Lösbarkeit eines LGS sagt die Determinante nicht viel mehr als

- Man kann die Matrix lösen, passt
- Geht nicht, lass es
- Was weiss denn ich

Das ist, wenn man bedenkt dass Determinante die Form einer ganz normalen Zahl hat, schon eine ganze Menge.

Berechnung

Hat man eine Matrix der Form

$$(a_{11})$$

Also eine 1x1 Matrix, dann ist die Determinante

$$\det((a_{11})) = a_{11}$$

die Schreibweise det(x) ist einfach der Name der Determinantenfunktion. Wir sehen also: bei einer 1x1 Matrix ist der einzige Wert gleichzeitig die Determinante.

Die Frage stellt sich ja jetzt weiterhin, wie sieht das ganze bei einer 2x2 Matrix aus? There we go:

$$det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Die Berechnungsmethode kann man hier vereinfacht auf das Schema „oben-links*unten-rechts“-„unten-links*oben-rechts“ bringen. Auch das kann man sich noch (für mathematische Verhältnisse) relativ gut merken.

Bei einer 3x3 Matrix sieht der Spaß dann schon anders aus, und jeder sieht ein dass es mit Spaß nicht mehr viel am Hut hat.

Und das hat sich unser Lieblingsvertreter der Spaßgesellschaft in diesem Kapitel, PIERRE FREDERIC SARRUS, auch gedacht und die nach ihm benannte Regel von Sarrus erfunden, um allen Determinantenrechnern auf diesem Planeten das Leben entscheidend zu erleichtern.

Regel von Sarrus

Wie gesagt, es geht um die Berechnung der Determinante einer 3x3 Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Dafür gibt es ein relativ einfaches Schema. Das funktioniert so. Im ersten Schritt schreiben wir die Matrix einmal komplett auf, und dann nochmal die ersten zwei Spalten daneben. Das sollte dann, allgemein, so aussehen:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix}$$

Weiter gehts, wir haben jetzt eigentlich schon alles was wir für die Anwendung von Sarrus-Magic brauchen. In Worten: 3x + von Oben links nach unten rechts, 3x - von unten links nach oben rechts

+

$$\begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix}$$

-

Das führt nach der Anwendung auf die Formel der Determinante:

$$\det(A) = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

Also ist auch das geschafft.

Berechnung für beliebige Matrizen

Wie oben schon gezeigt, gibt es für 1x1-3x3 Matrizen relativ einfache Faustregeln zur Berechnung. Wie in der Mathematik üblich, z.B. bei der vollständigen Induktion, wird auch bei der Berechnung beliebig großer Matrizen jetzt versucht, ein großes Problem auf viele kleine Probleme zu verteilen.

LaPlace'sche Entwicklungssatz

Völlig verständlich wenn man genau jetzt aufhört weiterzulesen, weil man denkt dass das seine Vorstellungskraft übersteigt. Aber das Ding ist relativ einfach zu Berechnen. Wir basteln uns eine Beispiel—4x4 Matrix, die ja symbolisch für das Problem steht

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 9 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir können im Moment, wie oben schon erwähnt, zügig 3x3 Matrizen berechnen, an sowas wie hier scheitern aber.

Deshalb wäre es doch interessant, die 4x4 Matrix irgendwie in ein paar „berechenbare“ 3x3 Matrizen zu zerlegen. Aber wie geht das, und geht das überhaupt?

Die Sache ist, das Matrizen ähnlich tolerant sind wie unsere normale Zahlenwelt. Wir können, unter der Beachtung bestimmter Regeln, ja auch 10 als 3+3+4 oder 2*5 ausdrücken. Das funktioniert auch bei Matrizen, nicht so einfach, aber die mit den im Prinzip selben Mitteln.

Zerlegung in Untermatrizen

Eine wichtige Aussage des LaPlace'schen Satzes ist, dass man z.B. 4x4 Matrizen in 4 3x3 Matrizen zerlegen, und nach speziellen Regeln wieder zusammensetzen darf. Das werden wir jetzt mit unserer Matrix oben tun.

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 6 & 9 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Jetzt haben wir oben unseren dicken Brummer, und den klopfen wir jetzt klein.

$$\det A_{11} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a_{11}} = \mathbf{1}, vz_{11} = (-1)^{i+j}$$

Nix verstanden, gell? Ging uns auch so. Wichtig für das Verständnis des ersten Elements (detA11) ist die Darstellung der Urmatrix oben. Man sieht zwei graue Striche, die Elemente „wegstreichen“, und effektiv eine 3x3 Matrix stehen lassen. Diese Matrix verwenden wir (durch die rote Markierung gut sichtbar) als Eingabe für unsere Determinantenfunktion. Die Bezeichnung im Index „11“ kommt daher, dass wir die erste Zeile und die erste Spalte der Urmatrix ausgestrichen haben, um diese 3x3 Teilmatrix zu erhalten.

Da wir schändlicherweise das Element, auf dem sich die beiden „Striche“ kreuzen, in unserem Fall die fettgedruckte 1, wird diese seperat notiert und von uns als Schnittelement bezeichnet.

Das letzte Element, vz_11, ist eine Funktion, die aus Spalten- und Zeilenindex ein Vorzeichen bestimmt. In unserem Fall ergibt Sie

$$(-1)^{1+1} = -1^2 = 1$$

d.h. wir arbeiten mit einem positiven Vorzeichen. Löst man jetzt alle anderen Untermatrixen auf kommen wir zu einem echten Zahlenungeheur

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{2} & 6 & 9 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A_{12} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a_{12}} = \mathbf{2}, vz_{12} = (-1)^{i+j} = -1$$

Wie man sieht, verhält sich das Erstellen der DetA_12 analog zum erstellen der ersten Untermatrix. Genauso machen wir weiter, wir verschieben immer die senkrechte Linie eins nach rechts, und weiter gehts.

$$\det A_{13}\begin{pmatrix}2&3&2\\3&4&1\\4&5&0\end{pmatrix}, \boldsymbol{a_{13}=16}\ vz_{13}=(-1)^{i+j}=1$$

$$\det A_{14}\begin{pmatrix}2&3&2\\3&4&1\\4&5&2\end{pmatrix}, \boldsymbol{a_{14}=9}, vz_{14}=(-1)^{i+j}=-1$$

Um jetzt die gesuchte Determinante der Urmatrix, die wir vor ca. 8 Seiten aufgeschrieben haben, zu erhalten, setzen wir die Determinanten der Untermatrizen jetzt nach einem genau definierten Verfahren zusammen. Jetzt wird auch ersichtlich für was wir das Schnittelement und die Vorzeichenfunktion brauchen.

$$\det A=+1*\det A_{11}\begin{pmatrix}3&2&2\\4&1&1\\5&2&0\end{pmatrix}-2*\det A_{12}\begin{pmatrix}2&2&2\\3&1&1\\4&2&0\end{pmatrix}+6*\det A_{13}\begin{pmatrix}2&3&2\\3&4&1\\4&5&0\end{pmatrix}-9*\det A_{14}\begin{pmatrix}2&3&2\\3&4&1\\4&5&2\end{pmatrix}$$

Wieder mal nichts verstanden? Schade, denn eigentlich ist es gar nicht so hart wies aussieht. Wie haben wir uns jetzt die Determinante unserer 4x4 Matrix aus den 4 3x3 Matrizen zusammengebastelt?

$$\det(A)=\sum_{i=1}^{n} vz_{1i}*a_{1i}*\det(A_{1i})$$

Wir bilden das Produkt der Unterdeterminanten $\det(A_{1n})$, ihrer Vorzeichfunktion vz_{1n} sowie des Schnittelements a_{1n} für jede Untermatrix, und summieren dann alles auf. Durch die Vorzeichenfunktion springt das Vorzeichen immer hin- und her.

Da wir jetzt die 4 3x3-Untermatrizen haben, können wir deren Determinanten mithilfe des Satz von Sarrus berechnen, und in die Formel einsetzen.

$$\det A=+1*10-2*8+6*6-9*-2=48$$

Inverse Matrix

Die inverse Matrix, also die „umgekehrte Matrix“ beschreibt ganz einfach eine Matrix, die multipliziert mit der „normalen“ Matrix das neutrale Element, also die Einheitsmatrix ergibt. Falls es möglich ist die Inverse Matrix zu bilden wissen wir auch, dass die Matrix eine eindeutige Lösung besitzt, da die Inverse Matrix eine bijektive lineare Abbildung ist. Aber dazu später mehr. Wie wir oben also schon geschrieben haben ergiebt eine Matrix mit ihrer Inversen Matrix die Einheitsmatrix:

$$A*A^{-1}=E$$

Wie berechnen wir nun die Inverse Matrix? Man darf natürlich auch hier die „normalen“ mathematischen Umformungen anwenden, was heißt:

$$A^{-1}=\frac{E}{A}$$

D.h. zu gut Deutsch, dass wir die Einheitsmatrix durch die Urmatrix teilen müssen, anders gesprochen die Urmatrix mit dem Gauß-Verfahren in die Einheitsmatrix umformen, während wir gleichzeitig die Einheitsmatrix automatisch mit den gleichen Umformungen in die Inverse Matrix umwandeln. Wir wenden also alle Operationen „gleichzeitig“ auf beide an und können dann beide Matrizen auch in eine große zusammenfassen:

$$(A|E) \Rightarrow (E|A^{-1})$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\dots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \dots = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Haben wir die Lösung entwickelt bzw gefunden haben wir schon dadurch bewiesen dass, falls unsere Urmatrix der Koeffizientenmatrix eines Gleichungssystems entspricht, dieses eine Lösung besitzt.